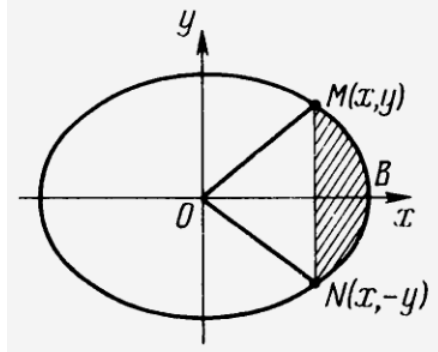


Az ellipszis - szektor területének kiszámítása

E célra képlet található [1] - ben. Ehhez magyarázat az 1. ábra.



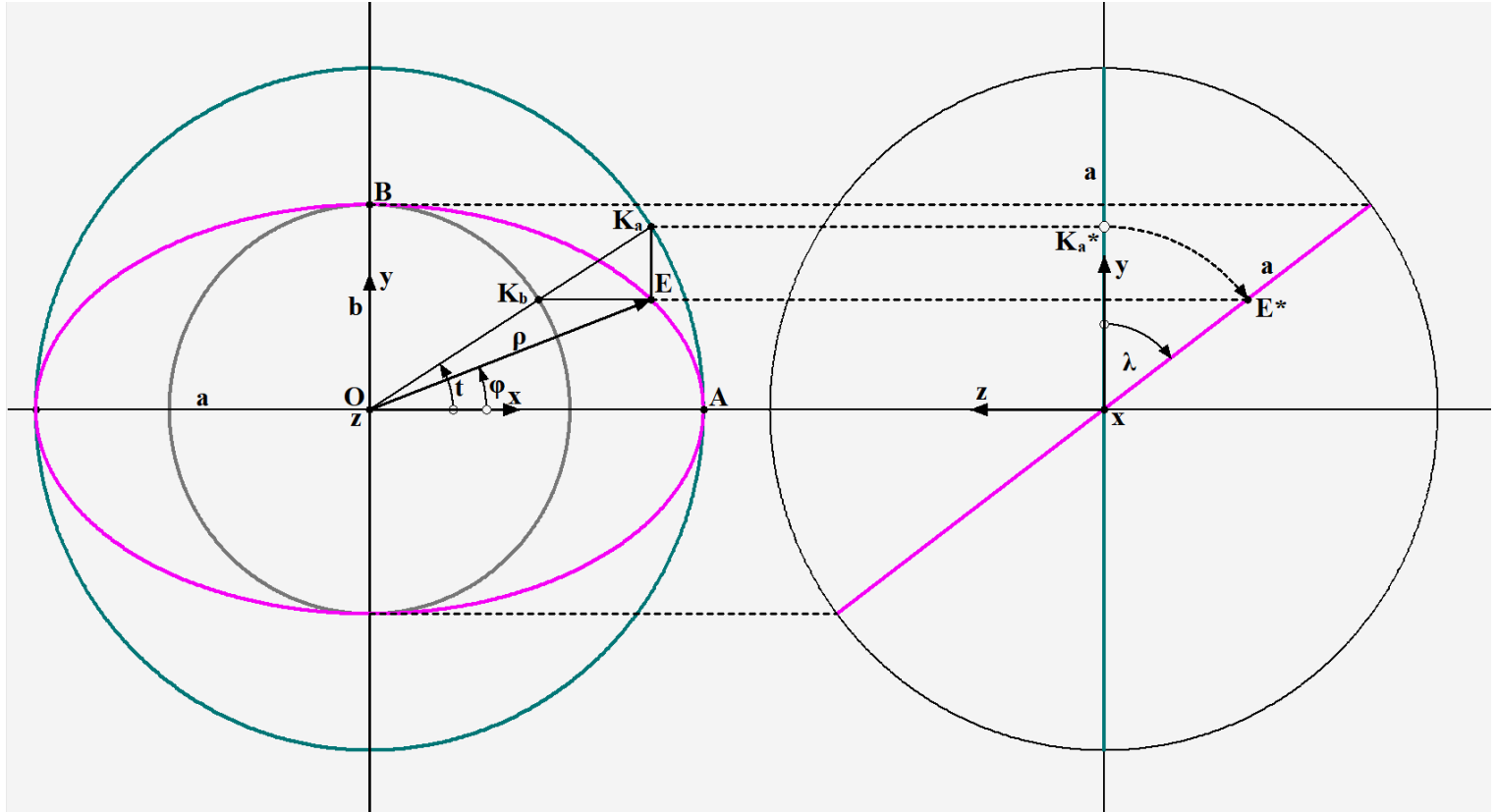
1. ábra – forrása: [1]

Az 1. ábra **OBMO** ellipszis - szektorának területe:

$$T_{OBMO} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right), \quad (1)$$

ahol **a** és **b** az ellipszis fél tengelyhosszai.

A közvetlen feladat az (1) formula levezetése. Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Először az a sugarú, t középponti szögű OK_aAO körszektor területét határozzuk meg, egyenes arányossággal:

$$\frac{T_{\text{körszektor}}}{T_{\text{kör}}} = \frac{t}{2 \cdot \pi} \rightarrow T_{\text{körszektor}} = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot T_{\text{kör}} = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot a^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot t ,$$

tehát:

$$\underline{T_{\text{körszektor}} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot t .} \quad (2)$$

Megint a 2. ábráról:

$$x_{K_a} = x_E = x = a \cdot \cos t \rightarrow \cos t = \frac{x}{a} \rightarrow \underline{t = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) .} \quad (3)$$

Most (2) és (3) szerint:

$$T_{\text{körszektor}} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) . \quad (4)$$

A 2. ábra az ellipszist mint a kör merőleges vetületét mutatja. Emiatt az $OEAO$ ellipszis - szektor területe:

$$T_{\text{ellipszis-szektor}} = T_{\text{körszektor}} \cdot \cos \lambda . \quad (5)$$

Majd (4) és (5) szerint:

$$\begin{aligned} T_{\text{ellipszis-szektor}} &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos \lambda = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a \cdot \cos \lambda) \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \\ \underline{\underline{T_{\text{ellipszis-szektor}}(x) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) , \quad 0 \leq x \leq a .}} \end{aligned} \quad (6)$$

hiszen a 2. ábra szerint:

$$b = a \cdot \cos \lambda . \quad (7)$$

Megállapítjuk, hogy az (1) és (6) képletek megegyeznek. 😊

Felvetődik, hogy mi van akkor, ha nem az x , hanem a φ koordinátával szeretnénk kifejezni az ellipszis - szektor területét? Ekkor felírjuk az $E(x, y)$ ellipszispont koordinátáinak különféle egyenleteit. Először (3) - mal:

$$x = a \cdot \cos t ; \quad (8/1)$$

majd a 2. ábra szerint, (7) - tel is:

$$y = (a \cdot \sin t) \cdot \cos \varphi = (a \cdot \cos \varphi) \cdot \sin t = b \cdot \sin t , \text{ tehát:}$$

$$y = b \cdot \sin t . \quad (8/2)$$

Ezután a derékszögű és a polárkoordináták kapcsolati egyenletei:

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi. \quad (9)$$

Most (8) és (9) - cel képezzük a koordináták hányadosát:

$$\frac{y}{x} = \frac{b \cdot \sin t}{a \cdot \cos t} = \frac{\rho \cdot \sin \varphi}{\rho \cdot \cos \varphi} \rightarrow \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \rightarrow t = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right),$$

tehát:

$$\underline{t = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right)}. \quad (10)$$

Ezután (3) és (9) szerint:

$$t = \arccos \left(\frac{x}{a} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (11)$$

Most (6) és (11) - gyel:

$$\underline{\underline{T_{\text{ellipszis - szektor}}(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}. \quad (12)$$

Megjegyzések:

M1. Úgy tűnik, az 1. ábra inkább egy másik képlethez, az *ellipszis - szelet* területéhez készült. Ahogyan az [1] mű, úgy mi is felhasználtuk az 1. ábrát (1) - hez. Egyébként az utóbbi terület az 1. ábra és (1) szerint, az ellipszis kanonikus egyenletével is így adódik:

$$T_{MBNM} = a \cdot b \cdot \arccos \left(\frac{x}{a} \right) - x \cdot y, \quad y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (M1)$$

M2. Az ellipszis fontos geometriai adatainak – pl. terület, ívhossz – meghatározását rend - szerint úgy végezzük, hogy részeredmények előállításához az 1. síknegyedben dolgozunk, majd a végeredmények kiszámításához felhasználjuk az ellipszis szimmetriáját is. Ennek egyik oka lehet a fellépő függvények szakadásos jellege is. Ilyen az **arctg(u)** függvény is.

M3. Elvégeztük a számítást integrálással is, és így is a (12) képletre jutottunk. Ezt itt nem részletezzük.

M4. Nekünk úgy tűnik, hogy a (12) szerinti számítás életszerűbb, mint a (6) szerinti. Persze, mindkettőre szükség lehet.

M5. A 2. ábra az ellipszis kétkörös szerkesztését is magyarázza. Egy ilyen ábra már több -

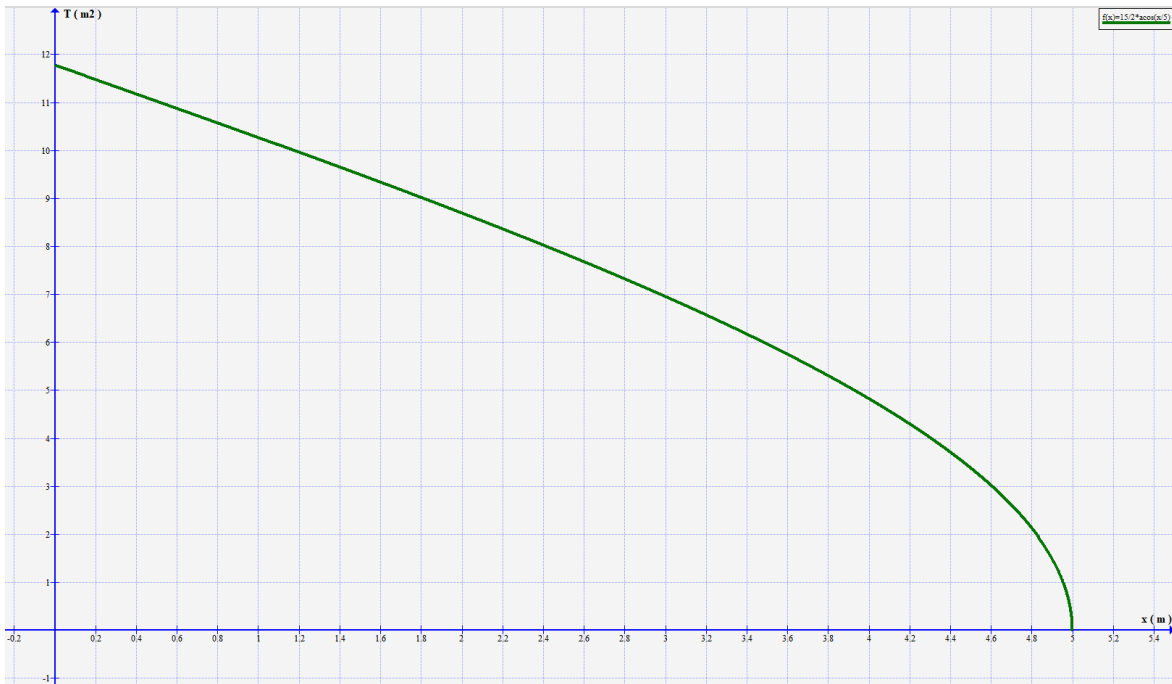
ször is készülhetett az idők során. Nem árt az ismételés.

M6. Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 5 \text{ m} ; b = 3 \text{ m} .$$

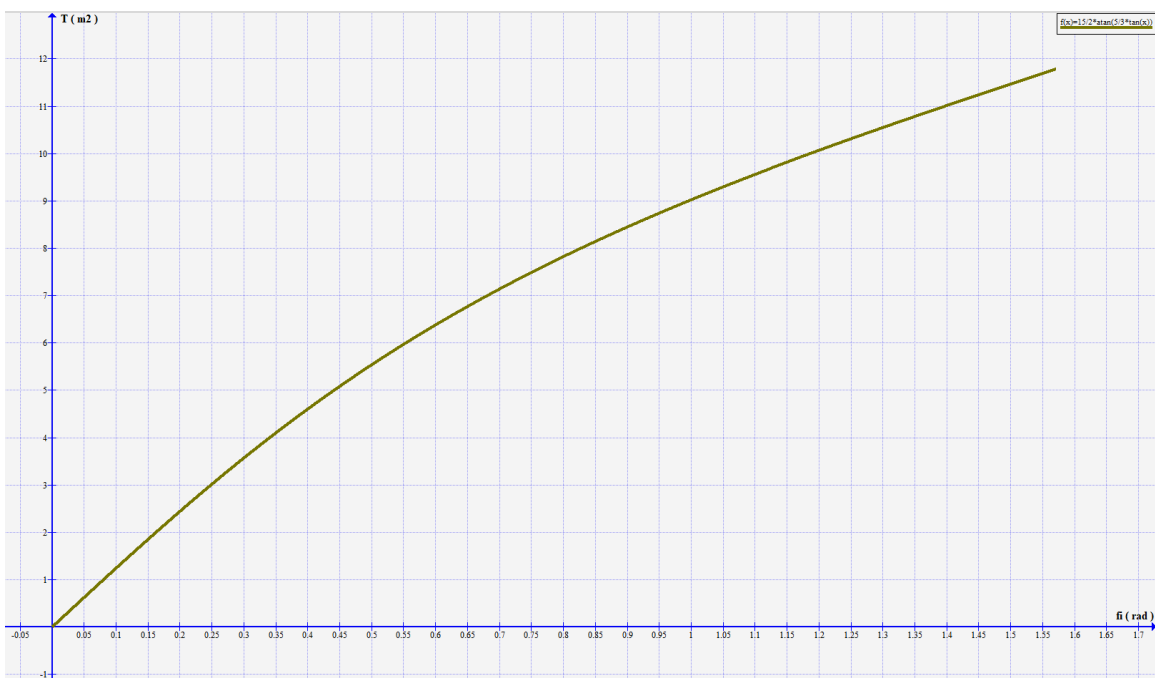
(A)

A (6) és (A) szerinti függvény grafikonját a 3. ábra mutatja.



3. ábra

A (12) és (A) szerinti függvény grafikonját a 4. ábra mutatja.

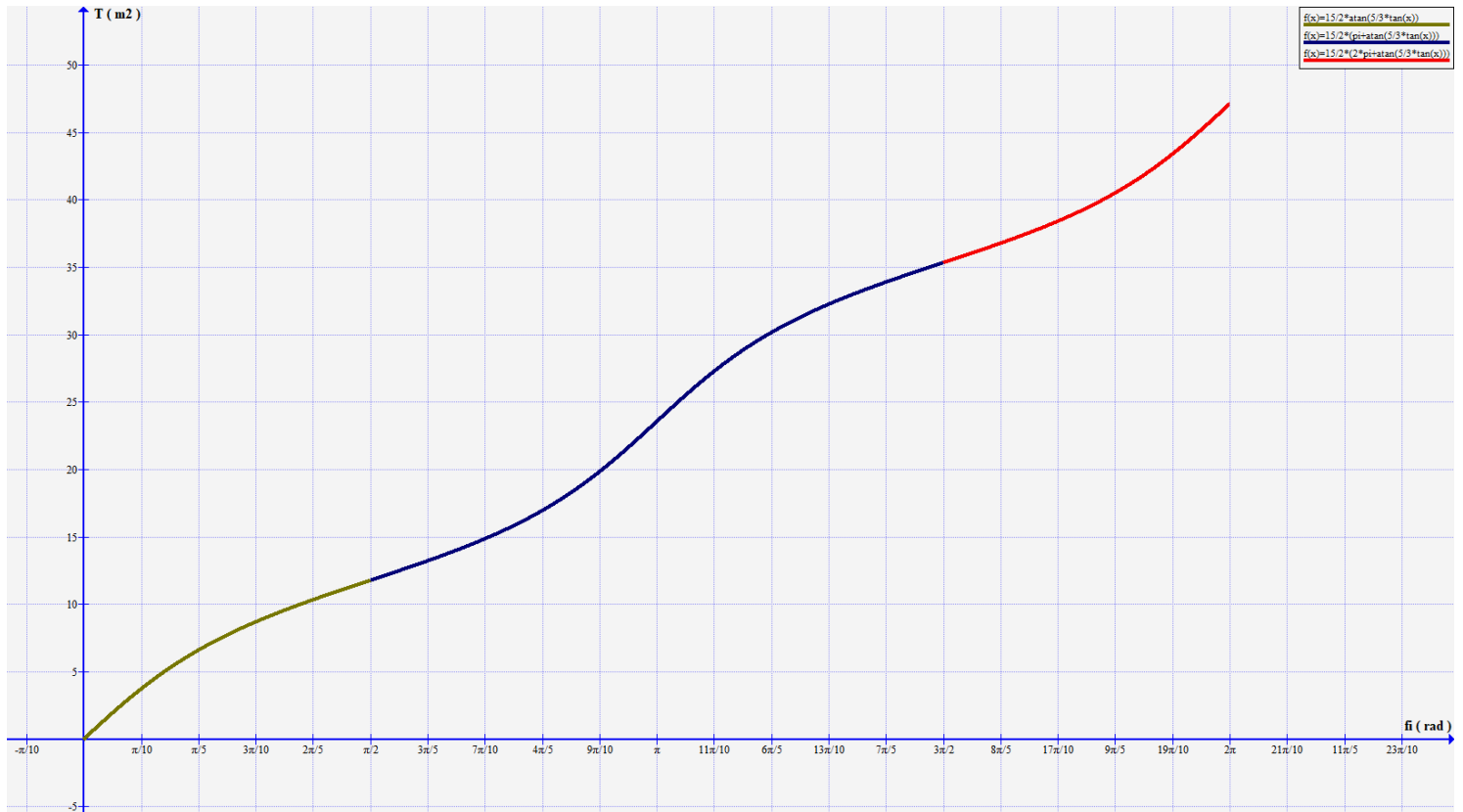


4. ábra

A grafikonok által mutatott legkisebb érték: 0 m^2 , a legnagyobb érték: $15/4 * \pi \text{ m}^2 \approx 11,781 \text{ m}^2$. Utóbbi a negyedellipszis területe.

M7. Célszerű a számításokat a zsebszámológép, illetve a rajzoló program **RAD** üzemi módjában végezni.

M8. A részekből összerakott teljes grafikon – a 4. ábra kiegészítése – az 5. ábrán látható.



5. ábra

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnök tanár

Szödliget, 2023. 12. 05.

Továbbiak: www.galgoczi.net